Наш современный григорианский календарь ввёл, как и следует из его названия, папа Григорий XIII, в 1582 году взамен прежнего юлианского календаря. Сделано это было как ни странно 4 октября, из-за чего после четвертого числа сразу последовало пятнадцатое. Чтобы понять, почему так получилось, углубимся в историю предшественника современного календаря.  
Юлианский календарь был введён, опять же в соответствии с его названием, Юлием Цезарем 1 января 45 года до нашей эры (хотя тогда не было никакой нашей эры). Тогда в Римской империи пользовались римским календарём и там было так же 12 месяцев. Названия месяцев практически повторяли современные, за исключением Quintilis и Sextilis (пятый и шестой), и заменённые на Июля и Августа, в честь Юлия Цезаря и Октавиана Августа. Проблема с римским календарём была в том, что он длился 355 дней и из-за этого, чтобы он соответствовал астрономическим циклам каждые два года вводился дополнительный тринадцатый месяц перед мартовскими идами, а именно в них происходило назначение консула Рима, что порой вводило политическую сумятицу. И чтобы с новым календарём такого не происходило его продолжительность сделали практически равной периоду полного обращения Земли вокруг Солнца - 365 дням. Но всё равно каждые 4 года образовывался дополнительный день, потому вместо дополнительного месяца ввели дополнительный день - 29 февраля. И это уже практически соответствовало циклам смены времён года 365,242. Потому он показался очень удобным, но из-за этой мизерной казалось разницы всё таки происходил небольшой сдвиг и ко времени упомянутого папы Григория он составлял уже 10 дней, а на данный момент разница между Юлианским и Григорианским календарём составляет 13 дней. Потому решили, наоборот, периодически отменять високосные года (каждые 100 лет за исключением каждого 400го года). При таком подходе вводить дополнительные сутки нам не потребуется ещё несколько тысяч лет.  
Сейчас на григорианский календарь перешли практически все страны мира. Но в арабских странах используется календарь привязанный к лунным циклам, но 12 лунных месяцев оказываются короче солнечного года. Из-за этого каждый год месяц Рамадан выпадает на другое время года. В еврейском календаре, который также привязан к лунным циклам, чтобы устранить эту рассогласованность вводят ещё один Адар (двенадцатый месяц) каждый високосный год. Что опять же похоже на дополнительный месяц в Древнем Риме.  
Есть в современном мире и другие интересные примеры календарей - например, Таиланд живёт фактически по григорианскому календарю, за тем исключением, что год считается не от времени рождения Христа, а от времени смерти Будды.  
У григорианского календаря есть и свои недостатки. Например, из-за того, что продолжительность недели 7 дней, а месяца 30 или 31, каждый новый месяц, за исключением невисокосного февраля, числа приходиться на другие дни недели. Кроме того, продолжительность месяцев, а отсюда и кварталов, непостоянна, из-за сравнение показателей (особенно экономических) месяц к месяцу и квартал к кварталу оказываются некорректными. Даже с одними и теми же праздниками из года в год, у нас разное число рабочих дней даже в рамках одного месяца (опять же из-за несовпадений дней недели). Сейчас в григорианском календаре, в отличии от того же лунного, начало месяца не приурочено ни к какому астрономическому явлению. Начало же года очень грубо можно связать с зимним солнцестоянием.  
Простейший вариант улучшения календаря сделать все месяцы равными 30 дням, тогда мы получим 12 месяцев в сумме 360 дней и 4 квартала по 90 дней. Некоторые банки уже сейчас рассчитывают проценты годовых исходя из такой продолжительности года (для удобства). А оставшиеся 5 или 6 дней сделать выходными. Месяц же можно разделить на декады по 10 дней и в них распределять выходные. Именно так и поступили во Франции в период революции. Подобный календарь просуществовал до 1806 года, не прижившись в современном обществе, в отличии от введённой в тот же период метрической системы.  
Ещё был проект календаря Армелина, где каждый месяц в середине длился 31 день, таким образом получалось что в квартале 91 день, а в году 364 дня, оба числа делятся на 7. А значит каждое число каждого месяца имело бы за собой определённый день недели. Из недостатков такого календаря - это выпадающие один или два дня в году, прерывающие непрерывный ход недель.  
Я конечно считаю, что в современном мире с его смартфонами и автоматизацией не так важно знать какой сегодня день недели, за тебя посчитает заботливый гугл календарь в твоём телефоне. Но с другой стороны и дни месяцев и недель утратили для большинства своё сакральное значение, а религиозные общины могут использовать для своих нужд свои старые календари, как это делают в арабском мире или в русской православной церкви. А для государственных нужд может быть учереждён более универсальный календарь. Может и не календарь вовсе, а просто циклы скажем по 100 дней с неделями по 10 дней. Ведь уже сейчас для нас не столь важны времена года, когда в любой момент можно купить билет на юг (или на север) или в другое полушарие. А для грядущих колонизаторов Марса вообще придётся изобретать календарь заново, ведь земные циклы перестанут иметь для них какое-либо значение.